



مرکز آزمون سین جیم

هرورنامه آزمون های تشریحی سین جیم

نام درس	سر گروه	گروه طراحی و بازنگری	مسئول تایپ
هندسه ۲	رسول حاجی زاده	سعید منوچی، سید محسن میراسلامی، صادق بازوی، رسول حاجی زاده، فاطمه حاجی زاده، حسین نیری پور	محمد وزیرزاده مسئول ویراستاران ریحانه غالبی

ویراستاران (به ترتیب حروف الفبا)

پریا بیرامی، پریناز نجفلو، پارسا طاهری منز، ریحانه سلیمانی، زهرا تلخابی، زهرا شاه
محمد قاسمی، ستایش عسگری، صبا رفیعی، مائده محمدیور، مریم معظمی، نرگس عبداللہی،
هانیه عبدی، یاسمین سپهری



مقارنه

۸ نمره از ۲۰ نمره امتحان خردادماه از فصل ۱ است که پیش بینی می شود همانند خرداد ۱۴۰۳ حدود ۵ نمره از آن ۸ نمره از دروس ۱ و ۲ (یعنی سرفصل حاضر) باشد.



مشاوره

دانش آموزان در این سرفصل، مخصوصاً درس ۱ جایی ضرر می کنند که تصور می کنند خیلی از گزاره ها بدیهی است و اثبات لازم ندارد در حالی که تمام آموخته های قبلیتان از دایره به صورت دقیق مورد اثبات قرار می گیرند. بنابراین، تلاش کنید برای هر سؤال اثباتی به صورت دقیق فرض مسئله و نیز حکم را نوشته و بدانید که از کجا شروع کرده و به کجا باید برسید.



زیر ذره بین

به خاطر نو بودن امتحانات نهایی در پایه یازدهم، تمامی سؤالات، قضایا و تمارین این دروس پتانسیل مطرح شدن در اولین امتحان رسمی شما را خواهند داشت، بنابراین تمامی آن ها ارزش زیر ذره بین رفتن را دارند.

♦ **دایره:** دایره مجموعه ای از نقاطی از یک صفحه است که همگی از نقطه ثابتی مانند O واقع در آن صفحه، به فاصله ی یکسانی باشند. نقطه O را مرکز و فاصله ثابت را شعاع دایره نامیده و معمولاً با r نمایش می دهند. دایره به مرکز O و شعاع r را به صورت $C(O, r)$ نمایش می دهند.

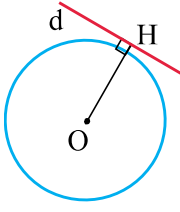
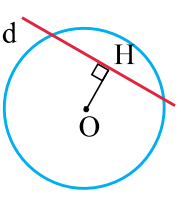
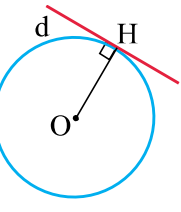
♦ **شعاع:** پاره خطی که نقطه دلخواهی از دایره را به مرکز آن وصل کند، شعاع دایره نامیده می شود.

♦ **وتر:** پاره خطی که دو نقطه متمایز از آن دایره را به هم وصل کند، وتر نامیده می شود.

♦ **قطر:** وتری از یک دایره که از مرکز آن دایره بگذرد قطر نامیده می شود.

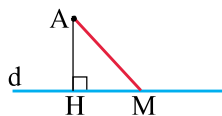
♦ **اوضاع نسبی خط و دایره:**

خط و دایره در حالت کلی نسبت به هم یکی از سه وضعیت زیر را دارند:

متخارج	متقاطع	مماس
		
$OH > r$	$OH < r$	$OH = r$

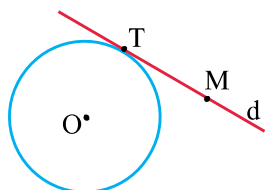
گزاره های زیر را در کنار هم قرار دهید:

۱ فاصله نقطه A از خط d عبارت است از طول عمود AH .



۲ در بین تمام پاره خط هایی که A را به تک تک نقاط خط d وصل می کنند، AH از همه کوتاه تر است، چون در مثلث قائم الزاویه ای مانند AHM ، طول وتر AM از ضلع AH بزرگ تر است.

۳ اگر خط d بر دایره $C(O, r)$ در نقطه T مماس باشد، آن گاه در بین تمام پاره خط هایی که O را به تک تک نقاط وصل خط d می کنند، OT کم ترین طول را دارد. (چون تمام نقاط خط d مانند M بیرون دایره بوده و $OM > R$).



نکته

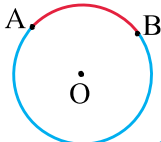
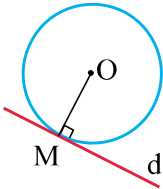
اگر خط d در نقطه T بر دایره $C(O, r)$ مماس باشد، آنگاه OT بر d عمود خواهد بود.

شکل ۱:

دایره $C(O, r)$ و نقطه M بر روی دایره مفروض اند. مماسی بر دایره در نقطه M رسم کنید.

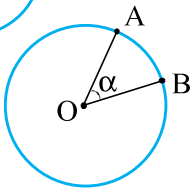
۰۰ پیوسته گام اول: از نقطه O به نقطه M وصل می کنیم.

گام دوم: در نقطه M عمودی مانند خط d بر OM رسم می کنیم. خط d جواب مسئله است.



♦ کمان: اگر دو نقطه A و B را بر روی دایره انتخاب کنیم، قسمتی از دایره که بین دو نقطه A و B قرار

می گیرد را کمان AB نامیده و به صورت $\widehat{AB}$ نمایش می دهند.



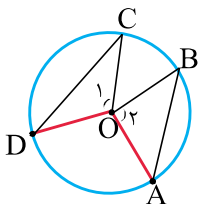
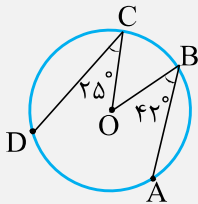
♦ زاویه مرکزی: زاویه ای است که رأس آن مرکز دایره و دو ضلعش دو شعاع متمایزی از آن باشد.

نکته

اندازه کمان مقابل به یک زاویه مرکزی با اندازه آن زاویه برابر گرفته می شود. بنابراین: $\widehat{AB} = \angle AOB = \alpha$

شکل ۲:

در شکل مقابل حاصل $\widehat{AD} + \widehat{BC}$ را بیابید.



۰۰ پیوسته از O به A و D وصل می کنیم:

$$OC = OD \Rightarrow \hat{D} = \hat{C} = 25^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = 13^\circ$$

$$OB = OA \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 42^\circ \Rightarrow \hat{O}_2 = 96^\circ$$

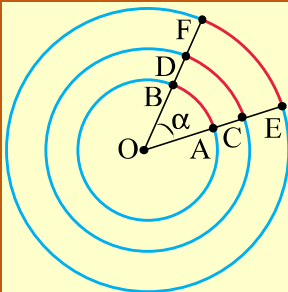
$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = 13^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = 13^\circ \\ \hat{O}_2 = 96^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 96^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AD} + \widehat{BC} = 36^\circ - (13^\circ + 96^\circ) = 134^\circ$$

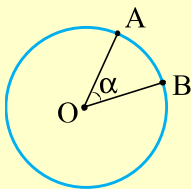
نکته

یک کمال با دو پارامتر سننیده می شود:

(۱) بر حسب متریک (۲) بر حسب درجه

در شکل مقابل اندازه کمان های $\widehat{AB}$ ، $\widehat{CD}$ و $\widehat{EF}$ همگی از نظر درجه برابر بوده و α هستند و بستگی به طول شعاع دایره ندارد، در حالی که طول آن سه کمان متمایز بوده و هر چه شعاع دایره بزرگ می شود طول کمان هم بزرگ تر می شود.



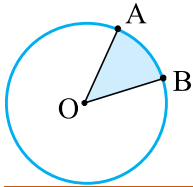


بین طول کمان، اندازه آن بر حسب درجه و شعاع دایره، رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{\text{طول کمان } \widehat{AB}}{2\pi r} = \frac{\text{اندازه کمان } \widehat{AB} \text{ بر حسب درجه}}{360^\circ}$$



نکته



♦ **قطاع دایره:** ناحیه‌ای از درون دایره که به دو شعاع متمایز از دایره و خود آن دایره محدود باشد، قطاع دایره نامیده می‌شود.

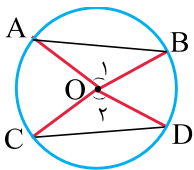


نکته

اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(O, r)$ بر حسب درجه برابر α باشد، آن‌گاه طول کمان AB برابر $\frac{\alpha}{180} \pi r$ و مساحت قطاع برابر با $\frac{\alpha}{360} \pi r^2$ خواهد بود.

مثال ۳: در دایره $C(O, r)$ وترهای AB و CD هم‌اندازه‌اند. ثابت کنید کمان‌های متناظر به آن‌ها نیز با هم برابرند.

۰۰ پاسخ:



$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض: } AB = CD \\ OA = OC = r \\ OB = OD = r \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAB = \triangle OCD$$

$$\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

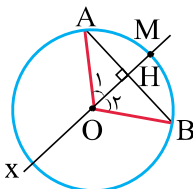
با روشی کاملاً مشابه روش بالا ثابت می‌شود که در دایره $C(O, r)$ اگر دو کمان $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ با هم برابر باشند، آن‌گاه وترهای AB و CD نیز برابر خواهند شد.



نکته

مثال ۴: ثابت کنید در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.

۰۰ پاسخ: از O به دو نقطه A و B وصل می‌کنیم:



$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = r \\ OH = \text{مشتک} \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle AOH = \triangle BOH \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AH = BH \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{MB} \end{array} \right.$$

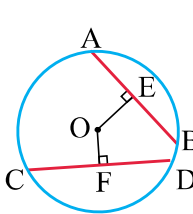
همانند مثال فوق ثابت می‌شود در یک دایره فقطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن دایره وصل می‌کند، بر آن وتر عمود بوده و کمان متناظر به آن وتر را نیز نصف می‌کند.



نکته

مثال ۵: در هر دایره از دو وتر نابرابر، آن که بزرگ‌تر باشد به مرکز نزدیک‌تر است.

۰۰ پاسخ:



فرض	$AB > CD$
حکم	$OE < OF$

$$AB > CD \Rightarrow AE > CF$$

$$\Rightarrow AE^2 > CF^2 \Rightarrow OA^2 - OE^2 > OC^2 - OF^2$$

$$\Rightarrow r^2 - OE^2 > r^2 - OF^2 \Rightarrow OF^2 > OE^2 \Rightarrow OF > OE$$

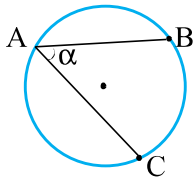
همانند مثال قبل ثابت می‌شود که اگر دو وتر از یک دایره با هم برابر باشند آن‌گاه از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس.



نکته

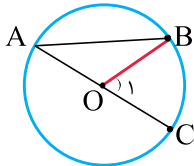


♦ زاویه محاطی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و دو ضلعش دو وتر متمایز از آن دایره باشند.



شکل ۶: در حالتی که یکی از دو ضلع زاویه محاطی قطر دایره باشد، آن گاه ثابت کنید اندازه آن زاویه نصف کمان مقابلش است.

۵۵ پیوسته: از O به B وصل می‌کنیم:



$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \\ \hat{O}_1 = \text{خارجی} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{A} + \hat{B} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = 2\hat{A} \Rightarrow \widehat{BC} = 2\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

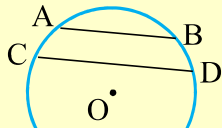
با کمک گرفتن از مثال قبل ثابت می‌شود اندازه زاویه محاطی در حالتی که مرکز دایره در درون آن زاویه باشد و نیز در حالتی که مرکز دایره در بیرون آن زاویه باشد نیز نصف کمان مقابلش می‌شود.

نکته

اندازه زاویه محاطی رویه‌رو به قطر دایره 90° است.

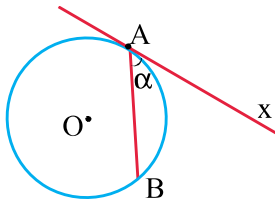
نکته

در یک دایره، کمان ممصور بین دو وتر موازی با یکدیگر برابرند و برعکس اگر دو سر دو کمان مساوی از یک دایره را به صورت غیرمقاطع به هم وصل کنید دو وتر موازی حادث می‌شود. (برای اثبات هر کدام، می‌توانید A را به D وصل کرده و از قاصیت فطوط موازی و مورب استفاده کنید.)



نکته

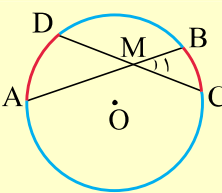
♦ زاویه ظلی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره، یک ضلعش وتر و دیگری مماس بر دایره باشد.



اندازه هر زاویه ظلی برابر با نصف کمان مقابلش است. (برای اثبات، قطری از دایره را رسم کنید که از رأس زاویه ظلی بگذرد.)

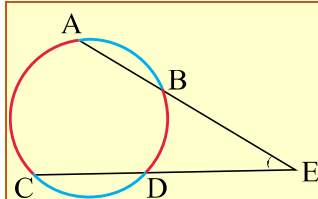
نکته

اگر دو وتر AB و CD از دایره‌ای مطابق شکل در نقطه M متقاطع باشند، آن گاه $\hat{M}_1 = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2}$. (برای اثبات می‌توانید B را به D وصل کرده و از قاصیت زاویه خارجی در مثلث MBD استفاده کنید.)

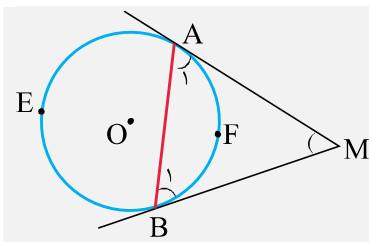


نکته

اگر امتداد دو وتر AB و CD از دایره‌ای مطابق شکل مقابل در نقطه‌ای مانند E در خارج دایره متقاطع باشند، آن گاه $\hat{E} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{BD}}{2}$. (برای اثبات می‌توانید B را به C وصل کرده و از قاصیت زاویه خارجی در مثلث BCE استفاده کنید.)



نکته

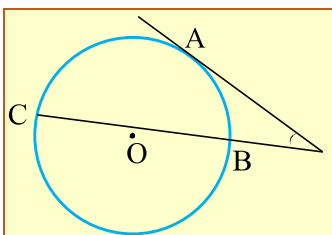


مثال ۷: از نقطه M دو مماس MA و MB بر دایره رسم شده‌اند. ثابت کنید:

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AEB} - \widehat{AFB}}{2}$$

۵۰ پیسخه: از A به B وصل می‌کنیم. دو زاویه $\hat{A}_1$ و $\hat{B}_1$ ظلی بوده و هر دو برابر نصف کمان $\widehat{AFB}$ خواهند شد:

$$\hat{M} = 180^\circ - (\hat{A}_1 + \hat{B}_1) = \frac{360^\circ - 2\hat{A}_1 - 2\hat{B}_1}{2} = \frac{360^\circ - \widehat{AFB} - \widehat{AFB}}{2} = \frac{\widehat{AEB} - \widehat{AFB}}{2}$$



اگر از نقطه M واقع در خارج دایره‌ای، مماس MA و قاطعی MN رسم کنیم که دایره را در دو نقطه B و C قطع کند آن‌گاه $\hat{M} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{AB}}{2}$ (برای اثبات می‌توانید A را به B وصل کرده و از قاصبت زاویه قاره‌ای در مثلث ABM استفاده کنید.)



شاهد عینی

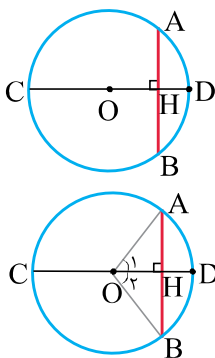
خرداد ۱۴۰۳: پر کردن جای خالی:

- اندازه هر زاویه ظلی برابر است با اندازه کمان روبه‌روبه آن زاویه.

پاسخ: نصف

خرداد ۱۴۰۳: در شکل مقابل وتر AB بر قطر CD عمود است، ثابت کنید قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند.

پاسخ:

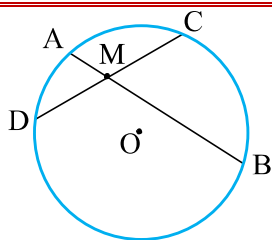


$$\left. \begin{array}{l} OH = OH = \text{مشترک} \\ OA = OB = r \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAH = \triangle OBH \Rightarrow \begin{cases} AH = HB \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{DB} \end{cases}$$



همان‌طور که در قسمت مشاوره اشاره شد نگرانی آن است که فرض و حکم مسئله را جابه‌جا بینید، بنابراین تلاش کنید از انشای سؤال، فرض و حکم را استخراج کرده و در جدول مجزایی به صورت ریاضی یادداشت کنید تا به جای اثبات خود مسئله، عکس آن را اثبات نکرده باشید.

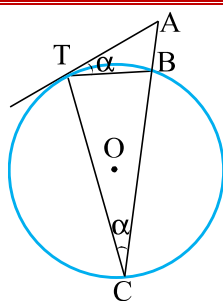
عنوان: هندسه ۲



📌 قضیه: اگر دو وتر دلخواه AB و CD از یک دایره یکدیگر را در نقطه M قطع کنند آن‌گاه $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ (حتی اگر M در امتداد AB و CD باشد).

برای اثبات A را به D و C را به B وصل کرده و از مثلث‌های متشابه استفاده کنید.

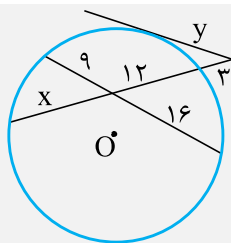
عکس قضیه: اگر پاره‌های AB و CD در نقطه M متقاطع باشند و $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ ، آن‌گاه دایره‌ای وجود دارد که از چهار نقطه A, B, C, D بگذرد.



📌 قضیه: هر گاه A نقطه‌ای بیرون دایره باشد و از A مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم مربع اندازه مماس برابر است با حاصل ضرب اندازه‌های دو قطعه قاطع.

$$AT^2 = AB \cdot AC$$

برای اثبات از T به B وصل کرده و از متشابه بودن دو مثلث ATB و ATC استفاده کنید.



مثال ۸: در شکل مقادیر X و Y را بیابید.

$$9 \times 16 = 12 \times x \Rightarrow x = 12$$

$$y^r = r(r + 1r + x) \Rightarrow y^r = r(r + 1r + 1r) \Rightarrow y^r = 11 \Rightarrow y = 9$$

•••

از هر نقطه بیرون دایره دقیقاً دو مماس بر آن دایره می‌توان رسم نمود و طول مماس از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$MT = \sqrt{d^r - R^r}$$



«««»»» طریقه رسم مماس بر یک دایره از نقطه‌ای واقع در خارج آن دایره را یاد بگیرید.

◆ مماس مشترک دو دایره:

اگر دو دایره در صفحه مفروض باشند و بتوان خطی چنان رسم کرد که بر هر دو دایره مماس باشد، آن خط را مماس مشترک آن دو دایره می‌گوییم. اگر مراکز هر دو دایره یک طرف مماس مشترک باشند آنرا مماس مشترک خارجی و اگر مراکز دایره‌ها در دو طرف مماس مشترک باشند، آنرا مماس مشترک داخلی می‌نامیم.

♦ خط مرکزین دو دایره: پاره خطی است که دو سر آن مراکز دو دایره است.

◆ وضعیت دو دایره نسبت به هم

♦ **دو دایره متخارج:** تمام نقاط هر یک از آن دو دایره در بیرون دیگری باشد.

♦ **دو دایره مماس:** فقط یک نقطه مشترک دارند که اگر به غیر از آن نقطه مشترک سایر نقاط یکی از آن دو دایره در درون دیگری باشند آن حالت را مماس بیرونی و در غیر این صورت آن حالت را مماس بیرونی گویند.

♦ دو دایره متقاطع: فقط دو نقطه مشترک دارند.

♦ دو دایره متداخل: تمام نقاط یک، درون دیگری باشند.



تعداد مماس مشترک داخلی	تعداد مماس مشترک خارجی	رابطه	شکل	حالت های دو دایره
۲	۲	$OO' > R + R'$		برون هم (متخارج)
۱	۲	$OO' = R + R'$		مماس برون
۰	۲	$ R - R' < OO' < R + R'$		مقاطع
۰	۱	$OO' = R - R' $		مماس درون
۰	۰	$OO' < R - R' $		متداخل
۰	۰	$OO' = ۰$		هم مرکز



نکته

طول مماس مشترک قاری دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ که در آن $OO' = d$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$\text{طول مماس مشترک قاری} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

(با ایوار مستطیل اثبات رابطه فوق را بلد باشید.)

نکته

طول مماس مشترک داخلی دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ که $OO' = d$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

(با ایوار مستطیل اثبات رابطه فوق را بلد باشید.)

نکته

کمترین فاصله نقاط دو دایره متقار $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ برابر است با: $OO' - (R + R')$

مثال ۹: اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع های ۲ و ۹ برابر ۲۴ است. اندازه کوچک ترین پاره خطی که دو سر آن بر روی هر یک از دو دایره باشد، چقدر است؟

۵۰ پاسخ

$\Rightarrow d^2 - 49 = 576 \Rightarrow d^2 = 625 \Rightarrow d = 25$

در نتیجه دو دایره متخارج هستند و طبق نکته قبل اندازه کوچک ترین پاره خطی که دو سر آن بر روی هر یک از دو دایره باشد، برابر است با:

$$25 - (2 + 9) = 14$$

نکته

قطر المکرزین نیمساز زاویه بین مماس مشترک های قاری و داخلی است، همچنین اگر زاویه بین دو مماس مشترک قاری را α و زاویه بین دو مماس مشترک داخلی را با β نشان دهیم، داریم:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{|R - R'|}{d}, \quad \sin \frac{\beta}{2} = \frac{R + R'}{d}$$

نکته

در دو دایره مماس قارج $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ اندازه مماس مشترک قاری برابر است با: $2\sqrt{RR'}$

۵۰ پاسخ

مثال ۱۰: دو دایره به شعاع های ۲ و ۳ مماس هستند، اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره را بیابید.

$$2\sqrt{2 \times 3} = 2\sqrt{6}$$

اندازه مماس مشترک خارجی

نکته

در دو دایره متقار همواره طول مماس مشترک قاری بزرگ تر از طول مماس مشترک داخلی آن ها است.

شاهد عینی

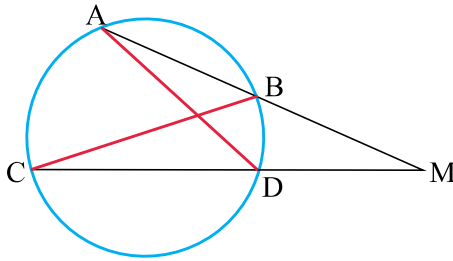


خرداد ۱۴۰۳: طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس برون به شعاع های R و R' برابر $2\sqrt{R + R'}$ است. (درست - نادرست)

پاسخ: نادرست

خرداد ۱۴۰۳: ثابت کنید هر گاه خط‌های شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M (بیرون دایره) یکدیگر را قطع کنند، آن گاه:

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$



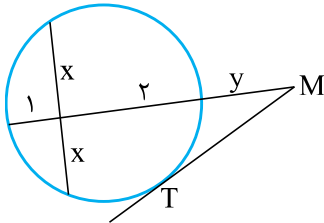
پاسخ: از A به D و از B به C وصل می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{C} = \frac{\widehat{BC}}{2} \\ \hat{M} = \hat{M} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{زا}} \triangle AMD \sim \triangle CMB$$

$$\Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{MA}{MC} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

خرداد ۱۴۰۳: در شکل زیر MT به طول $3\sqrt{2}$ مماس بر دایره است. مقادیر x و y را به دست آورید.

پاسخ:



$$x \cdot x = 1 \times 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$MT^2 = y \times (y + 2 + 1) \Rightarrow 18 = y^2 + 3y \Rightarrow y = 3$$



مقارنه

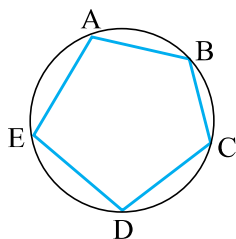
۸ نمره از ۲۰ نمره امتحان خردادماه (یعنی ۴۰٪) از فصل اول کتاب درسی است که حدود ۳ نمره از آن از درس ۳ یعنی سرفصل حاضر خواهد بود.



مشاوره

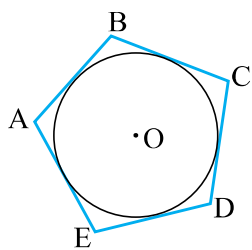
مطالب این درس نسبت به دو درس اول و دوم حرفه‌ای‌تر و کمی سنگین‌تر است بنابراین، ایجاب می‌کند نسبت به دو درس قبلی وقت بیش‌تری برای یادگیری و تفهیم آن، صرف کنید.

♦ نکات برجسته درس:



۱- یک چندضلعی را محاطی گویند هرگاه تمام رئوس آن بر روی دایره واقع باشند. چنین دایره‌ای را دایره محیطی آن چندضلعی گویند.

از آن‌جا که عمودمنصف هر وتر از یک دایره از مرکز آن دایره می‌گذرد معلوم می‌شود که عمودمنصف‌های تمام اضلاع یک n ضلعی محاطی در یک نقطه (که همان مرکز دایره محیطی می‌شوند) هم‌رسند.

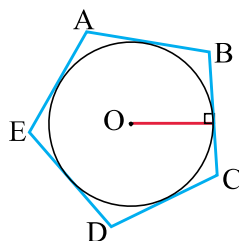


۲- یک چندضلعی را محیطی گویند هرگاه تمام اضلاع آن بر دایره‌ای مماس باشند. چنین دایره‌ای را دایره محاطی داخلی آن چندضلعی گویند.

از آن‌جا که نیمساز داخلی تمام زوایای $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \dots$ از چندضلعی محیطی از مرکز دایره می‌گذرند معلوم می‌شود که نیمسازهای داخلی تمام زوایای یک n ضلعی محاطی در یک نقطه (که همان مرکز دایره محاطی داخلی است) هم‌رسند.

۳- یک چندضلعی محاطی است اگر و تنها اگر عمودمنصف‌های تمام اضلاع آن هم‌رس باشند و یک چندضلعی محیطی است اگر و تنها اگر نیمسازهای زوایای داخلی آن هم‌رس باشند.

مثال ۱: اگر S مساحت و $2P$ محیط یک چندضلعی محاطی و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، آن‌گاه ثابت کنید رابطه $r = \frac{S}{P}$ برقرار است.



۰۰ پیوسته مثلث‌های $OAB, OBC, \dots$ را تشکیل داده و توجه داریم که r ارتفاع وارد بر قاعده تمام آن‌هاست:

$$S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OBC} + \dots = S$$

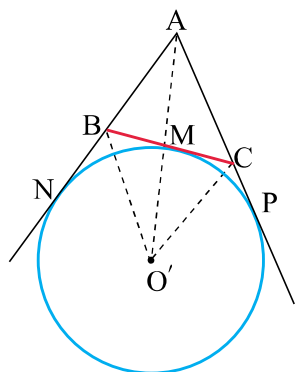
$$\Rightarrow \frac{1}{2}r \cdot (AB) + \frac{1}{2}r \cdot (BC) + \dots = S$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}r \cdot [AB + BC + \dots] = S \Rightarrow \frac{1}{2}r \cdot (2P) = S \Rightarrow r \cdot P = S \Rightarrow r = \frac{S}{P}$$

۴- از آن‌جا که عمودمنصف‌های سه ضلع هر مثلثی هم‌رسند بنابراین، هر مثلثی محاطی بوده و دایره محیطی دارد که شعاع دایره محیطی آن را R می‌نامند.

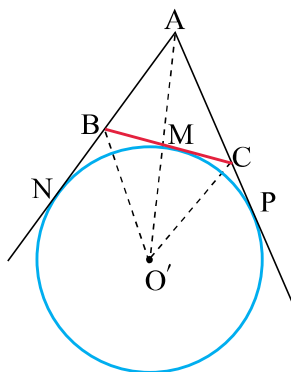
۵- از آن‌جا که نیمسازهای داخلی هر مثلثی هم‌رسند بنابراین، هر مثلثی محیطی بوده و دایره محاطی داخلی دارد که شعاع آن را با r نمایش داده و رابطه $r = \frac{S}{P}$ برقرار است.

۶- از آن‌جا که دو نیمساز خارجی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ و نیز امتداد نیمساز داخلی زاویه $\hat{A}$ در نقطه‌ای مانند O' هم‌رسند، معلوم می‌شود که دایره‌ای به مرکز O' وجود دارد که بر BC و امتداد اضلاع AB و AC مماس باشد. این دایره را دایره محاطی خارجی نظیر رأس A گویند و شعاع آن را با r_a نمایش می‌دهند.



شکل ۲: ثابت کنید در یک مثلث، رابطه $r_a = \frac{S}{P-a}$ برقرار است.

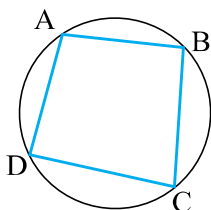
۰۰ پیوسته



$$\begin{aligned} S_{\triangle O'AC} + S_{\triangle O'AB} &= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle O'BC} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} O'P \cdot AC + \frac{1}{2} O'N \cdot AB &= S + \frac{1}{2} O'M \cdot BC \\ \Rightarrow r_a [b + c - a] &= 2S \Rightarrow r_a \cdot [(2P - a) - a] = 2S \\ \Rightarrow r_a \times 2(P - a) &= 2S \Rightarrow r_a = \frac{S}{P - a} \end{aligned}$$

۷- قضیه: در یک چهارضلعی محاطی، دو زاویه مقابل مکمل یکدیگرند.

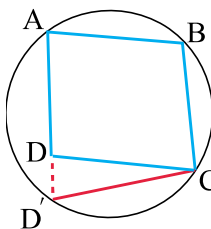
برهان:



$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\widehat{BCD}}{2} \\ \hat{C} &= \frac{\widehat{DAB}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{DAB}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

۸- عکس قضیه: اگر دو زاویه مقابل از یک چهارضلعی مکمل باشند، آن گاه آن چهارضلعی محاطی است.

برهان: از سه نقطه A, B و C یک دایره می‌گذرد. اگر آن دایره از D نگذرد آن گاه AD یا امتداد آن را در D' قطع می‌کند. چون ABCD' محاطی می‌شود، پس:

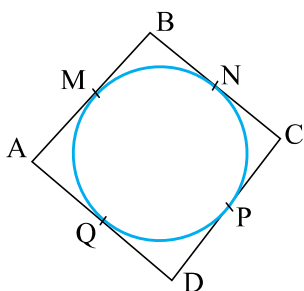


$$\left. \begin{aligned} \hat{B} + \hat{D}' &= 180^\circ \\ \text{فرض: } \hat{B} + \hat{D} &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{D}' = \hat{D}$$

در مثلث CD'D زاویه خارجی $\hat{D}$ نمی‌تواند با زاویه داخلی غیرمجاورش یعنی $\hat{D}'$ برابر باشد.

۹- قضیه: در یک چهارضلعی محیطی، مجموع دو ضلع مقابل با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر است.

برهان:

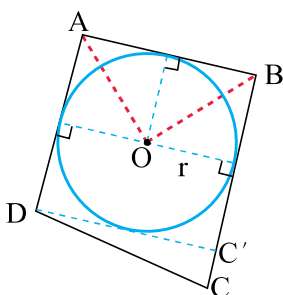


$$\left. \begin{aligned} BM &= BN \\ CP &= CN \\ DP &= DQ \\ AM &= AQ \end{aligned} \right\} \xrightarrow{+} (BM + AM) + (CP + DP) = (BN + CN) + (DQ + AQ) \\ \Rightarrow AB + CD = BC + AD$$

۱۰- عکس قضیه: اگر مجموع دو ضلع مقابل در یک چهارضلعی با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر باشد،

آن گاه ثابت کنید آن چهارضلعی محیطی است.

برهان: فرض می‌کنیم نیمسازهای زوایای داخلی A و B در نقطه‌ای مانند O متقاطع باشند. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع r به هر سه ضلع AB, BC, AD مماس خواهد بود. اگر آن دایره به DC مماس نباشد DC' را رسم می‌کنیم. چون چهارضلعی ABC'D محیطی می‌شود، پس:



$$\left. \begin{aligned} AB + DC' &= AD + BC' \\ \text{فرض: } AB + CD + AD + BC & \end{aligned} \right\} \Rightarrow CD - DC' = BC - BC' \\ \Rightarrow DC = DC' + CC'$$

در یک مثلث یک ضلع نمی‌تواند با مجموع دو ضلع دیگر برابر باشد و این تناقض است.

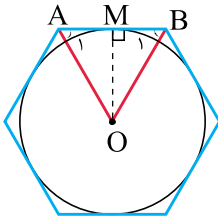


۱-) چندضلعی محدبی که هم تمام اضلاعش و هم تمام زوایایش با هم برابر باشند منتظم نامیده می شود.

۲-) هر n ضلعی منتظمی هم محاطی است و هم محیطی.

مثال ۳: اگر طول هر ضلع یک ۶ ضلعی منتظم برابر ۱۲ باشد، آن گاه مساحت دایره محاطی را بیابید.

۰۰ پاسخ:



$$\hat{A} = \hat{B} = 120^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{O} = 60^\circ \Rightarrow \triangle OAB = \text{متساوی الاضلاع} \Rightarrow OA = 12$$

$$r = OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{144 - 36} = 6\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{\text{دایره}} = \pi r^2 = 108\pi$$

زیر زره بین

تمارین صفحات ۲۹ و ۳۰ اهمیت زیادی دارند، حل آن ها را بلد باشید.

شاهد عینی

سؤالاتی از درس ۳ فصل اول که در خرداد ۱۴۰۳ مطرح شده بودند به شرح ذیل اند:

* درستی یا نادرستی:

- هر چند ضلعی منتظم، هم محاطی است و هم محیطی.

پاسخ: درست

* پر کردن جالی خالی:

- اگر r_a, r_b, r_c شعاع های سه دایره محاطی خارجی یک مثلث و شعاع دایره محاطی داخلی آن برابر ۴ باشد، حاصل

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

برابر است.

$$\text{پاسخ: تساوی } \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \text{ برقرار است.}$$

- ثابت کنید اگر یک چهارضلعی محاطی باشد، آن گاه دو زاویه مقابل آن مکمل هستند.

پاسخ: در نکته ۷ اثبات انجام شده است.

- در مثلث قائم الزاویه ای با اضلاع زاویه قائمه ۳ و ۴، شعاع دایره محاطی داخلی را محاسبه کنید.

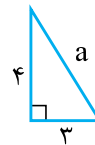
پاسخ:

$$S = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

$$a = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\Rightarrow 2P = 3 + 4 + 5 = 12 \Rightarrow P = 6$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{6}{6} = 1$$





مقارمه

۶ نمره از ۲۰ نمره دی ماه از این سرفصل است. بنابراین ایجاب می کند که مطالب آن را با دقت تمام دنبال کنید.

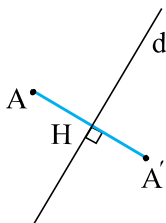
مشاوره



سوالات اساسی و تمرین تبدیلات هندسی اکثراً در درس دوم مطرح می شوند و درس اول اغلب به تعاریف و ویژگی های تبدیلات می پردازد و اکثر دانش آموزان در درک آن تعاریف و مفاهیم مشکلی ندارند.

♦ نکات برجسته درس:

- ۱- در صفحه P تبدیل T تابعی است که به هر نقطه A از آن صفحه نقطه ای منحصر به فرد مانند A' از همان صفحه را متناظر می کند و برعکس.
- ۲- تبدیل یافته هر شکل را تصویر آن شکل می نامیم.
- ۳- تبدیلی که در آن طول هر پاره خط با طول تبدیل یافته اش برابر باشد ایزومتري یا تبدیل طولی نامیده می شود.
- ۴- اثبات این قضیه را که در هر تبدیل طولی، اندازه زاویه حفظ می شود را بلد باشید.
- ۵- در هر تبدیل نقطه ای که تبدیل یافته آن به خود آن نقطه منطبق می شود را نقطه ثابت آن تبدیل گویند.
- ۶- بازتاب نقطه A نسبت به خط d نقطه ای است به نام A' به طوری که d عمود منصف AA' باشد. بازتاب را با S نشان داده و اگر A' بازتاب A نسبت به خط d باشد آن گاه آن را به صورت $S_d(A) = A'$ نمایش می دهند.
- ۷- طولی بودن تبدیل بازتاب در حالت های مختلف را از صفحات ۳۶ و ۳۷ کتاب درسی فرا بگیرید.
- ۸- تبدیل بازتاب شیب یک خط را لزوماً حفظ نمی کند.
- ۹- تبدیل بازتاب جهت شکل را حفظ نمی کند.



زیر ذره بین



جای خالی کار در کلاس صفحه ۳۸ کتاب درسی را به درستی پر کنید زیرا برای جمع بندی و تفهیم بازتاب گزاره های مناسبی هستند.

- ۱۰- انتقال یافته نقطه A تحت بردار $\vec{V}$ نقطه ای است مانند A' به طوری که بردار $\overrightarrow{AA'}$ با بردار $\vec{V}$ برابر باشد.
 - ۱۱- با پیگیری فعالیت صفحه ۳۹ کتاب درسی دلیل طولی بودن تبدیل انتقال را یاد بگیرید.
 - ۱۲- تبدیل انتقال جهت شکل را حفظ می کند.
 - ۱۳- نقطه A' را دوران یافته نقطه A تحت زاویه α و به مرکز O گویند هرگاه هر دو تساوی $\angle A'OA = \alpha$ و $OA' = OA$ برقرار باشند و به صورت زیر نمایش می دهند:
- $$A' = R_O^\alpha(A)$$
- ۱۴- با پیگیری فعالیت صفحه ۴۰ کتاب درسی دلیل طولی بودن دوران را یاد بگیرید.
 - ۱۵- تبدیل دوران نیز همانند انتقال جهت شکل را حفظ می کند.

زیر ذره بین



تمامی تمرین صفحات ۴۲ و ۴۳ کتاب درسی اهمیت داشته و پتانسیل مطرح شدن در امتحان نهایی را دارند.



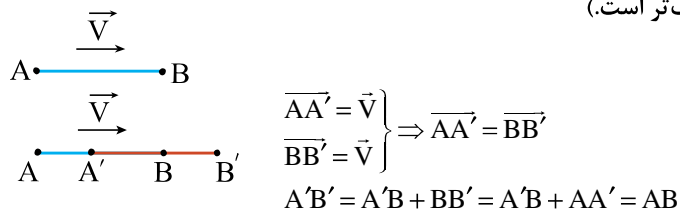
شاهد عینی



نهایی خرداد ۱۴۰۳: با توجه به شکل زیر نشان دهید در تبدیل انتقال اندازه هر پاره خط و اندازه تصویر آن با هم برابرند.

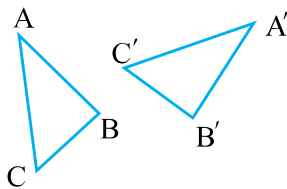
($\vec{V} \parallel AB$ و اندازه $\vec{V}$ از اندازه پاره خط AB کوچک تر است).

پاسخ:



نهایی خرداد ۱۴۰۳: نقاط A' و B' به ترتیب دوران یافته نقاط A و B هستند. روش یافتن مرکز دوران را شرح دهید.

پاسخ: محل تلاقی عمودمنصف‌های AA' و BB' و CC' جواب مسئله است.





مقارنه

در مرورنامه قبلی هم اشاره شد که ۶ نمره از ۲۰ نمره امتحان خردادماه به فصل ۲ اختصاص دارد که درس اول این فصل بیش تر حالت معرفی تبدیلات و ویژگی های آن است و درس دوم کاربردهایی از آن تبدیلات که در سرفصل حاضر به تعدادی از آن کاربردها اشاره خواهد شد.



مشاوره

معرفی تمامی تبدیلات هندسی به غیر از تجانس در مرورنامه قبلی انجام شد. مهم ترین تبدیلات یعنی تجانس نیز در این مرورنامه معرفی شده و سپس مسائلی از کاربرد تبدیلات را در سطح کتاب درسی مطرح خواهیم کرد.

♦ نکات برجسته فصل:

۱- مجانس نقطه A نسبت به نقطه O و با مقیاس k را نقطه A' گویند هرگاه اولاً A' ، O و A در یک راستا باشند و ثانیاً نسبت پاره خط جهت دار $\overline{OA'}$ به پاره خط جهت دار $\overline{OA}$ برابر k باشد.

۲- اگر $k > 0$ آن گاه A' و A در طرفین O به گونه ای قرار دارند که نسبت $\frac{OA'}{OA}$ برابر $|k|$ باشد:

۳- اگر $0 < k < 1$ آن گاه A' بین O و A چنان قرار دارد که $\frac{OA'}{OA} = k$:

۴- اگر $k = 1$ آن گاه A' بر A منطبق شده و تناسب $\frac{OA'}{OA} = 1$ برقرار است:

۵- اگر $k > 1$ آن گاه A بین O و A' چنان قرار دارد که $\frac{OA'}{OA} = k$:

۶- اگر نقطه A' مجانس نقطه A به مرکز O و مقیاس k باشد آن گاه نقطه A مجانس نقطه A' به مرکز O و مقیاس $\frac{1}{k}$ خواهد شد.

۷- اگر $|k| < 1$ آن گاه تجانس را **انقباض**، اگر $|k| > 1$ آن گاه تجانس را **انبساط**، اگر $k > 0$ آن گاه تجانس را **مستقیم** و بالاخره اگر $k < 0$ آن گاه تجانس را **معکوس** گویند.

۸- برای پیدا کردن مجانس پاره خط AB مجانس A و B را پیدا کرده و نقاط حاصل را به هم متصل می کنیم.

۹- مجانس هر شکل با شکل اولیه و با نسبت k متشابه است.

۱۰- تجانس شیب خط را حفظ می کند.

زیر زره بین

اثبات حفظ شدن شیب خط که در صفحه ۴۶ بیان شده است را بلد باشید.

۱۱- برای پیدا کردن مجانس خط d به مرکز O ، به یکی از دو شیوه زیر عمل می کنیم:

I) مجانس دو نقطه متمایز از d را یافته و نقاط به دست آمده را به هم وصل کرده و امتداد می دهیم.

II) مجانس نقطه اختیاری A از d را یافته و A' می نامیم سپس از A' خط d' را موازی خط d رسم می کنیم.

۱۲- برای پیدا کردن مجانس دایره $C(O, R)$ به مرکز M و با مقیاس k ابتدا مجانس نقطه O را یافته و O' می نامیم. دایره ای به مرکز O' و شعاع $|k| \cdot R$ دایره مورد نظر خواهد شد.

۱۳- تجانس اندازه زاویه را حفظ می کند.



زیر زره سین

اثبات حفظ اندازه زاویه در تجانس در صفحه ۴۷ کتاب درسی در قالب قضیه‌ای مطرح شده است، آن را یاد بگیرید.

۴- تبدیل T را همانی گوئیم هرگاه تبدیل یافته هر نقطه‌ای از صفحه، خود آن نقطه باشد. در تجانس اگر $k=1$ آن گاه آن تجانس تبدیل به تبدیل همانی می‌شود.

۵- در تبدیل دوران نیز اگر زاویه دوران 0° یا 360° باشد آن گاه آن دوران تبدیل به تبدیل همانی می‌شود. در تبدیل انتقال نیز اگر بردار $\vec{V}$ بردار صفر باشد آن انتقال تبدیل به تبدیل همانی خواهد شد.

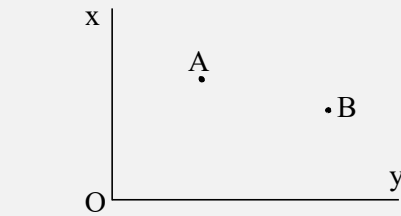
زیر زره سین

تمارین صفحات ۴۸ و ۴۹ را فرا بگیرید.

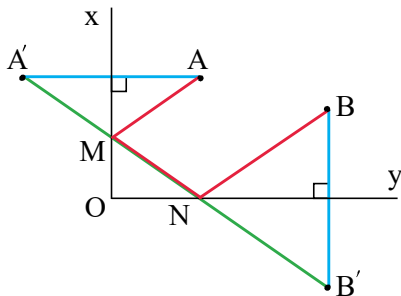
زیر زره سین

در درس ۲ از فصل دوم (صفحات ۵۰ تا ۵۴) مسائل خوبی مطرح شده است آن‌ها را به خوبی فرا بگیرید. ما در این مرورنامه از تکرار آن‌ها اجتناب کرده و به حل یکی دو مثال مرتبط بسنده می‌کنیم.

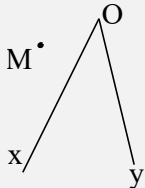
مثال ۱: دو نیم خط عمود بر هم Ox و Oy و نقاط A و B به صورت مقابل داده شده‌اند. دو نقطه M و N را به ترتیب بر روی Ox و Oy چنان بیابید که مسیر شکسته $AMNB$ کوتاه‌ترین مقدار ممکن باشد.



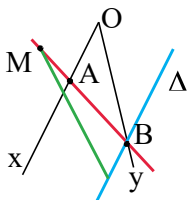
پسینج: بازتاب محوری A نسبت به Ox را A' ، بازتاب محوری B نسبت به Oy را B' می‌نامیم. $A'B'$ را وصل می‌کنیم تا Ox را در M و Oy را در N قطع کند. نقاط به‌دست آمده نقاط مطلوب هستند چرا که مسیر شکسته $AMNB$ با پاره خط $A'B'$ برابر است، و بین A' و B' کوتاه‌ترین مسیر همان پاره خط $A'B'$ است.



مثال ۲: زاویه xOy نقطه M مطابق شکل مقابل داده شده‌اند. می‌دانیم از M بی‌شمار خط می‌گذرد که با هر دو نیم خط Ox و Oy متقاطع باشد. از بین آن بی‌شمار خط، خط d را چنان رسم کنید که Ox و Oy را به ترتیب در A و B چنان قطع کند که $MA = \frac{1}{4}AB$.



پسینج: اگر A و B درست پیدا شوند چون A، B، و M در یک امتداد بوده و حاصل $\frac{MB}{MA}$ برابر ۳ می‌شود، بنابراین نقطه B مجانس نقطه A با مرکز M و نسبت ۳ محسوب می‌شود. بنابراین:



مجانس Ox به مرکز M و مقیاس ۳ را پیدا کرده و Δ می‌نامیم. محل تقاطع Δ با Oy نقطه B خواهد شد. محل تقاطع MB با Ox نیز همان نقطه A خواهد شد.





نهایی خرداد ۱۴۰۳:

سؤال ۱: برای هر کدام از عبارات گروه A، تبدیل مناسب را از گروه B انتخاب کنید. (یک مورد از گروه B اضافی است):

گروه B	گروه A
دوران	الف) تبدیلی که جهت شکل را حفظ نمی کند.
همانی	ب) تبدیلی که نتیجه دو بازتاب متوالی با محورهای متقاطع است.
بازتاب	پ) تبدیلی که هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر می کند.
انتقال	

پاسخ: الف) بازتاب (ب) دوران (پ) همانی

سؤال ۲: در شکل روبه‌رو اگر خط L را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{7}{4}$ تصویر کنیم و آن را L' بنامیم مساحت بین خط L و L' و خطوط d و d' چقدر است؟

پاسخ: مثلث OA'B' با مثلث OAB با نسبت $\frac{7}{4}$ متشابه می‌شود، بنابراین مساحت آن $(\frac{7}{4})^2$ برابر مساحت مثلث OAB است، پس:

$$S_{OA'B'} = (\frac{7}{4})^2 \cdot S_{OAB} = \frac{49}{16} \times \frac{1 \times 2}{2} = \frac{49}{16}$$

$$\Rightarrow S_7 = \frac{49}{16} - 1 = \frac{33}{16}$$

سؤال ۳: با توجه به شکل نقطه M روی پاره خط HK = ۸ را به گونه‌ای بیابید که:

الف) مسیر AMB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد.

ب) کم‌ترین مقدار عددی AM + MB را محاسبه کنید.

پاسخ: الف) بازتاب محوری A نسبت به HK را رسم کرده و نقطه حاصل را A' می‌نامیم. امتداد A'B پاره خط HK را در نقطه‌ای قطع می‌کند. آن نقطه همان نقطه مطلوب و نقطه M است چرا که طول مسیر شکسته AMB با طول پاره خط A'B برابر است و بین دو نقطه A' و B کوتاه‌ترین مسیر پاره خط راست است.

ب) از A' به امتداد BK عمود A'N را رسم کرده و قضیه فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$$AM + MB = A'M + MB = A'B = \sqrt{A'N^2 + BN^2}$$

$$= \sqrt{HK^2 + (BK + KN)^2} = \sqrt{8^2 + (4 + 2)^2} = 10$$

سؤال ۴: در شکل مقابل می‌خواهیم بدون آن که محیط تغییر کند. مساحت را افزایش دهیم. میزان افزایش مساحت را حساب کنید:

پاسخ: باید بازتاب نقطه B نسبت به AC را پیدا کرده و B' بنامیم محیط چندضلعی EAB'CD با محیط EABCD برابر بوده، ولی مساحتش به اندازه دو برابر مساحت مثلث ABC اضافه شده است:

$$? = 2S_{ABC} = 2 \times [\frac{1}{2} \times 3 \times 4\sqrt{2} \times \sin 135^\circ] = 12$$





مقارم

۶ نمره از امتحان نهایی خردادماه به فصل سوم اختصاص دارد که حدوداً نیمی از آن به سرفصل حاضر یعنی درس ۱ و ۲ مربوط می‌شود.

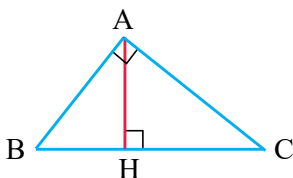


مشاوره

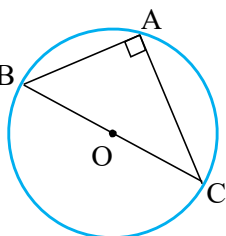
همان‌طور که از عناوین دو درس حاضر مشخص است در این سرفصل حضور روابط مثلثاتی پررنگ می‌شود.

♦ نکات برجسته سرفصل:

۱- اگر AH ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه باشد آن گاه تمام روابط زیر برقرارند:



- $AB^2 = BH \cdot BC$
- $AC^2 = CH \cdot BC$
- $AH^2 = BH \cdot HC$
- $AB^2 + AC^2 = BC^2$
- $AB \cdot AC = AH \cdot BC$
- $\sin \hat{B} = \cos \hat{C} = \frac{AC}{BC}$



۲- اگر شعاع دایره محیطی مثلث قائم‌الزاویه برابر R باشد، آن گاه خواهیم داشت:

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow 2R = \frac{AC}{\sin \hat{B}}$$

۳- در هر مثلثی مانند ABC که شعاع دایره محیطی آن برابر R باشد رابطه $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$ برقرار است که به قضیه سینوس‌ها معروف است. اثبات این قضیه در صفحه ۶۳ کتاب درسی آمده است.

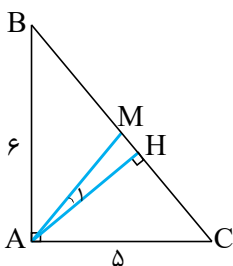


زیر زهین

به مثال‌ها، کاردر کلاس و تمرین موجود در صفحات ۶۴ و ۶۵ توجه ویژه داشته باشید.

مثال ۱: در یک مثلث قائم‌الزاویه به اندازه دو ضلع قائم ۵ و ۶ سانتی‌متر است. سینوس زاویه بین ارتفاع و میانه وارد بر وتر این مثلث برابر را بیابید.

پس پاسخ: در مثلث قائم‌الزاویه ABC ارتفاع و میانه AM وارد بر وتر را رسم کرده‌ایم. داریم:



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61 \Rightarrow BC = \sqrt{61}$$

$$\text{بنابراین } AM = \frac{\sqrt{61}}{2}$$

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times \sqrt{61} = 5 \times 6 \Rightarrow AH = \frac{30}{\sqrt{61}}$$

$$\Delta AMH : MH^2 = AM^2 - AH^2 = \left(\frac{\sqrt{61}}{2}\right)^2 - \left(\frac{30}{\sqrt{61}}\right)^2 = \frac{61}{4} - \frac{900}{61} = \frac{3721 - 3600}{244} = \frac{121}{244}$$

$$\Rightarrow MH = \frac{11}{2\sqrt{61}}$$

پس در مثلث قائم‌الزاویه AMH با استفاده از تعریف سینوس داریم:



(برای به دست آوردن MH می توان ابتدا CH را با استفاده از رابطه $CH = \frac{AC^2}{BC}$ به دست آورد، داریم:

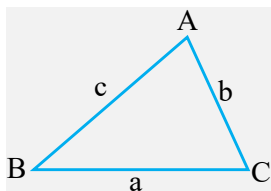
$$(MH = CH - MH = \frac{\sqrt{61}}{2} - \frac{25}{\sqrt{61}} = \frac{11}{2\sqrt{61}})$$

$$\sin A_1 = \frac{MH}{AM} = \frac{\frac{11}{2\sqrt{61}}}{\frac{\sqrt{61}}{2}} = \frac{11}{61}$$

مثال ۲: در مثلث ABC، $BC = 10 \text{ cm}$ و اندازه شعاع دایره محیطی مثلث برابر $\frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$ است. اندازه زاویه A را به دست آورید.

۰۰ **پسرخ:** طبق قضیه سینوسها داریم:

$$2R = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow \frac{20\sqrt{3}}{2} = \frac{10}{\sin A} \Rightarrow \sin A = \frac{30}{20\sqrt{3}} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ \text{ یا } 120^\circ$$



مثال ۳: در مثلث ABC رابطه $a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 A = 8$ برقرار است اندازه ضلع BC را به دست آورید.

۰۰ **پسرخ:** می دانیم $\cos^2 B = 1 - \sin^2 B$ حال با استفاده از فرض می نویسیم:

$$a^2(1 - \sin^2 B) + b^2 \sin^2 A = 8 \Rightarrow a^2 - a^2 \sin^2 B + b^2 \sin^2 A = 8 \quad (1)$$

از طرف دیگر بنابر قضیه سینوسها داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow a \sin B = b \sin A \quad (2)$$

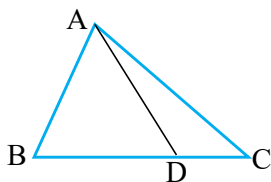
از روابط (۱) و (۲) نتیجه می شود:

$$a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2} \Rightarrow BC = 2\sqrt{2}$$

۴- در مثلث ABC بین اضلاع و زاویهها رابطه $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$ برقرار است که به قضیه کسینوسها معروف است و اثبات آن در صفحه ۶۶ کتاب درسی آمده است.

۵- اگر D نقطه ای اختیاری بر قاعده BC از مثلث ABC باشد آن گاه با استفاده از قضیه کسینوسها رابطه زیر ثابت می شود که به رابطه استوارت معروف است:

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC + BD \cdot DC \cdot BC$$



زیرزمین

مثالها، کار در کلاس و تمرین موجود در صفحات ۶۷، ۶۸ و ۶۹ را به خوبی مرور کنید.

۶- هم با استفاده از قضیه کسینوسها و هم با استفاده از قضیه استوارت می توان رابطه زیر را بین سه ضلع مثلث ABC و نیز m_a یعنی طول میانه وارد بر ضلع BC به دست آورد:

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

مثال ۴: در مثلث ABC ، $AB = 2\sqrt{2}$ ، $AC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ و $\hat{A} = 60^\circ$ است، اندازه زوایای B و C را بیابید.

پاسخ: روش اول: ابتدا با استفاده از قضیه کسینوس ها اندازه ضلع BC را به دست می آوریم.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})(2\sqrt{2})(\cos 60^\circ)$$

$$= 6 + 2 + 2\sqrt{12} + 8 - 4(\sqrt{12} + 2)(\frac{1}{2}) = 16 + 2\sqrt{12} - 2\sqrt{12} - 4 = 12 \Rightarrow BC = \sqrt{12}$$

حال با استفاده از قضیه سینوس ها ابتدا اندازه زاویه C را به دست می آوریم.

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a} \Rightarrow \sin C = \frac{2\sqrt{2} \sin 60^\circ}{\sqrt{12}} = \frac{2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2})}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ \text{ یا } 135^\circ$$

اگر $\hat{C} = 135^\circ$ باشد. مجموع زوایای مثلث از 180° بیشتر می شود، پس $\hat{C} = 45^\circ$ ، بنابراین:

$$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 75^\circ$$

روش دوم: از قضیه سینوس ها استفاده می کنیم:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sin(120^\circ - C)} \Rightarrow \frac{\sin(120^\circ - C)}{\sin C} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(60^\circ + C)}{\sin C} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sin 60^\circ \cos C + \cos 60^\circ \sin C}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cot C + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cot C = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cot C = 1 \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ$$

مثال ۵: در مثلث مختلف الاضلاع ABC رابطه $a^2 + a^2 c = c^2 + a^2 b$ بین اضلاع برقرار است. اندازه زاویه A چقدر است؟

پاسخ: ابتدا فرض سؤال را ساده می کنیم:

$$b^2 + a^2 c = c^2 + a^2 b \Rightarrow b^2 - c^2 = a^2 b - a^2 c$$

$$\Rightarrow (b - c)(b^2 + c^2 + bc) = a^2 (b - c) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + bc \quad (1)$$

بنابر قضیه کسینوس ها داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \xrightarrow{(1)} b^2 + c^2 + bc = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\Rightarrow \cos A = -\frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ$$

شاهد عینی



نهایی خرداد ۱۴۰۳: در مثلث ABC ، $BC = 10 \text{ cm}$ ، $\hat{A} = 30^\circ$. مقدار شعاع دایره محیطی کدام است؟

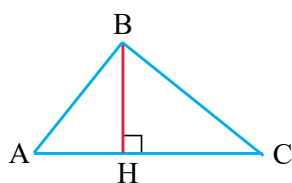
الف) ۱۰ ب) ۱۵ پ) ۲۰ ت) ۲۵

پاسخ: گزینه الف صحیح است.

$$\frac{BC}{\sin \hat{A}} = 2R \Rightarrow \frac{10}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow R = 10$$

نهایی خرداد ۱۴۰۳: در مثلث ABC که $(\hat{A} < 90^\circ)$ ، ثابت کنید: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$

پاسخ:



$$\cos \hat{A} = \frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c \cdot \cos \hat{A}$$

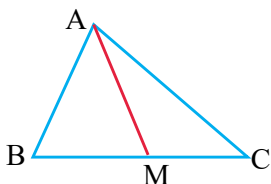
$$a^2 = BH^2 + CH^2 = (c^2 - AH^2) + (b - AH)^2$$

$$= c^2 - AH^2 + b^2 + AH^2 - 2AH \cdot b$$

$$= b^2 + c^2 - 2b(c \cdot \cos \hat{A}) = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

نهایی خرداد ۱۴۰۳: در مثلث ABC که در آن $AB = 4$, $AC = 6$ و $BC = 8$ نقطه M وسط ضلع BC است. محیط مثلث AMC را بیابید.

پاسخ:



$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2} \Rightarrow 16 + 36 = 2AM^2 + \frac{64}{2}$$

$$\Rightarrow AM^2 = 10 \Rightarrow AM = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow ? = AC + MC + AM = 6 + 4 + \sqrt{10} = 10 + \sqrt{10}$$





مقدمه

۶ نمره از امتحان نهایی خردادماه به فصل سوم اختصاص دارد که حدوداً نیمی از آن به دروس ۱ و ۲ و نیمی دیگر به دروس ۳ و ۴ یعنی سرفصل حاضر اختصاص دارد.

هندسه ۲

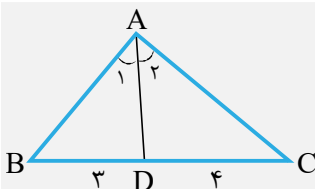
مشاوره



مباحث این دو درس یعنی قضیه نیمسازها و قضیه هرون خیلی کم بوده و در حد یکی دو تا فرمول است و یادگیری آن کار چندانی ندارد.

♦ نکات برجسته سرفصل:

- ۱- **قضیه:** در هر مثلث نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.
(اثبات قضیه در صفحه ۷۰ کتاب درسی بیان شده است که توجه به آن اثبات به شدت توصیه می‌شود).
- ۲- **قضیه:** در هر مثلث مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه منتهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز، روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.
(اثبات این قضیه هم در صفحه ۷۱ کتاب درسی آمده است که انتظار می‌رود این اثبات را هم به خوبی فرا بگیرید).



مثال ۱: در شکل مقابل $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 45^\circ$ محیط مثلث ABC را پیدا کنید.

🔴 **پیشگ:** از تساوی $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ نتیجه می‌گیریم AD نیمساز است. پس بنابر قضیه نیمساز داخلی داریم:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = \frac{3}{4}AC \quad (1)$$

از طرف دیگر مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است، پس بنابر قضیه فیثاغورس داریم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 7^2 = \left(\frac{3}{4}AC\right)^2 + AC^2 \Rightarrow 49 = \frac{9}{16}AC^2 + AC^2$$

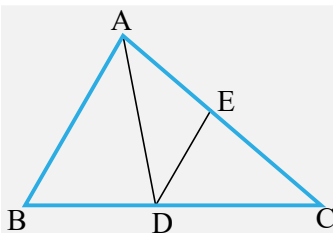
$$\Rightarrow 49 = \frac{25}{16}AC^2 \Rightarrow 7 = \frac{5}{4}AC \Rightarrow AC = \frac{28}{5}$$

از (۱) نتیجه می‌گیریم:

$$AB = \frac{3}{4} \left(\frac{28}{5}\right) = \frac{21}{5}$$

پس محیط مثلث ABC برابر است با:

$$AB + AC + BC = \frac{21}{5} + \frac{28}{5} + 7 = \frac{84}{5}$$



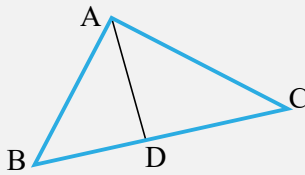
مثال ۲: در شکل مقابل $\Delta AB = 2AC = 60$ و AD نیمساز زاویه A است. اگر $DE \parallel AB$ باشد، آنگاه اندازه EC را به دست آورید.

🔴 **پیشگ:** از فرض $\Delta AB = 2AC = 60$ نتیجه می‌گیریم $AB = 12$ و $AC = 30$ ، بنابر قضیه نیمساز و قضیه تالس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AD \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \\ DE \parallel AB \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AE}{EC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{12}{20} = \frac{AE}{EC}$$

با ترکیب نسبت در صورت کردن تناسب به دست آمده نتیجه می گیریم:

$$\frac{20+12}{20} = \frac{EC+AE}{EC} \Rightarrow \frac{32}{20} = \frac{20}{EC} \Rightarrow EC = \frac{400}{32} = 12\frac{1}{2}$$



مثال ۳: در مثلث ABC، پاره خط AD نیمساز داخلی زاویه A است. اگر طول پاره خطهای AB، AD و AC به ترتیب برابر ۳، $\sqrt{2}$ و ۶ باشند، آنگاه طول پاره خطهای BD و DC را به دست آورید.

۰۰ پاسخ

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow DC = 2BD$$

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC \Rightarrow 2 = 3 \times 6 - BD(2BD)$$

$$\Rightarrow 2BD^2 = 16 \Rightarrow BD = 2\sqrt{2} \Rightarrow DC = 4\sqrt{2}$$

زیر زهین

در صفحه ۷۰ تعدادی تمرین گنجانده شده است که پتانسیل مطرح شدن در امتحان پایان ترم را دارد.

۳- اگر a، b و c طول سه ضلع مثلث، P نصف محیط و S مساحت آن مثلث باشند آنگاه رابطه زیر برقرار است که به قانون هرون معروف است:

$$S = \sqrt{P \cdot (P-a) \cdot (P-b) \cdot (P-c)}$$

زیر زهین

مثالها، کار در کلاس و تمرین صفحات ۷۱ تا ۷۴ کتاب درسی را به دقت حل کنید.

مثال ۴: در مثلثی با اضلاع ۲۵، ۳۹ و ۴۰ طول ارتفاع وارد بر ضلع متوسط را بیابید.

۰۰ پاسخ ابتدا به کمک رابطه هرون مساحت مثلث را به دست می آوریم، سپس اندازه ارتفاع را محاسبه می کنیم:

$$P = \frac{25+39+40}{2} = \frac{104}{2} = 52 \text{ و } S = \sqrt{52(27)(13)(12)} = \sqrt{4 \times 13 \times 3^3 \times 13 \times 4 \times 3} = 4 \times 13 \times 9$$

اگر اندازه ارتفاع وارد بر ضلع ۳۹ را h بنامیم، داریم:

$$\frac{39 \times h}{2} = 4 \times 13 \times 9 \Rightarrow h = 24$$

۴- بین مساحت، طول اضلاع و سینوس زاویهها رابطه زیر برقرار است:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \sin \hat{C} = \frac{1}{2} a \cdot c \sin \hat{B} = \frac{1}{2} b \cdot c \sin \hat{A}$$

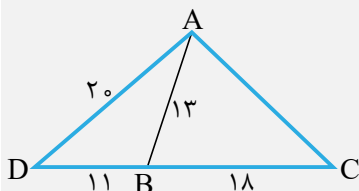
۵- مساحت هر چهارضلعی برابر با نصف حاصل ضرب طول دو قطر آن در سینوس زاویه بین آن دو قطر است.

مثال ۵: در مثلث ABC اندازه ضلع AC دو برابر اندازه ضلع BC است، اگر اندازه زاویه C، 30° و مساحت مثلث ۱۸ باشد، اندازه ضلع AC را بیابید.

۰۰ پاسخ: فرض کنیم $AC = BC = 2x$ ، با استفاده از نکته ۴ داریم:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \sin \hat{C} \Rightarrow 18 = \frac{1}{2} x(2x) \sin 30^\circ \Rightarrow 18 = x^2 \left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow AC = 2x = 12$$

مثال ۶: در شکل مقابل S_{ABC} را محاسبه کنید.



۰۰ پاسخ: ابتدا مساحت مثلث ABD را به دست می آوریم، سپس مساحت مثلث ABC را به کمک نسبت قاعده ها محاسبه می کنیم:

$$P = \frac{13+11+20}{2} = 22 \text{ و } S_{ABD} = \sqrt{22(11)(2)(9)} = 66$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{11}{18} \Rightarrow \frac{66}{S_{ABC}} = \frac{11}{18} \Rightarrow S_{ABC} = 108$$

مثال ۷: در مثلث به اضلاع ۵، ۴ و ۷ اندازه شعاع دایره محاطی داخلی را به دست آورید.

۰۰ پاسخ: در مثلث به مساحت S و محیط 2P شعاع دایره محاطی r از رابطه $r = \frac{S}{P}$ به دست می آید.

$$P = \frac{7+4+5}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{8(8-7)(8-4)(8-5)} = \sqrt{8 \times 1 \times 4 \times 3} = 4\sqrt{6}$$

$$r = \frac{4\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

شاهد عینی

نهایی خرداد ۱۴۰۳: مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون بیابید.

پاسخ:

$$P = \frac{a+a+a}{2} = \frac{3}{2}a$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{\frac{3}{2}a \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

نهایی خرداد ۱۴۰۳: در مثلث ABC، $AB = 7$ ، $AC = 4$ و $BC = 10$ است، طول نیمساز داخلی زاویه C را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{x}{7-x} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5x = 14 - 2x \Rightarrow x = 2, BD = 5$$

$$CD^2 = AC \cdot BC - AD \cdot DB$$

$$\Rightarrow CD^2 = 4 \times 10 - 2 \times 5 = 30 \Rightarrow CD = \sqrt{30}$$

